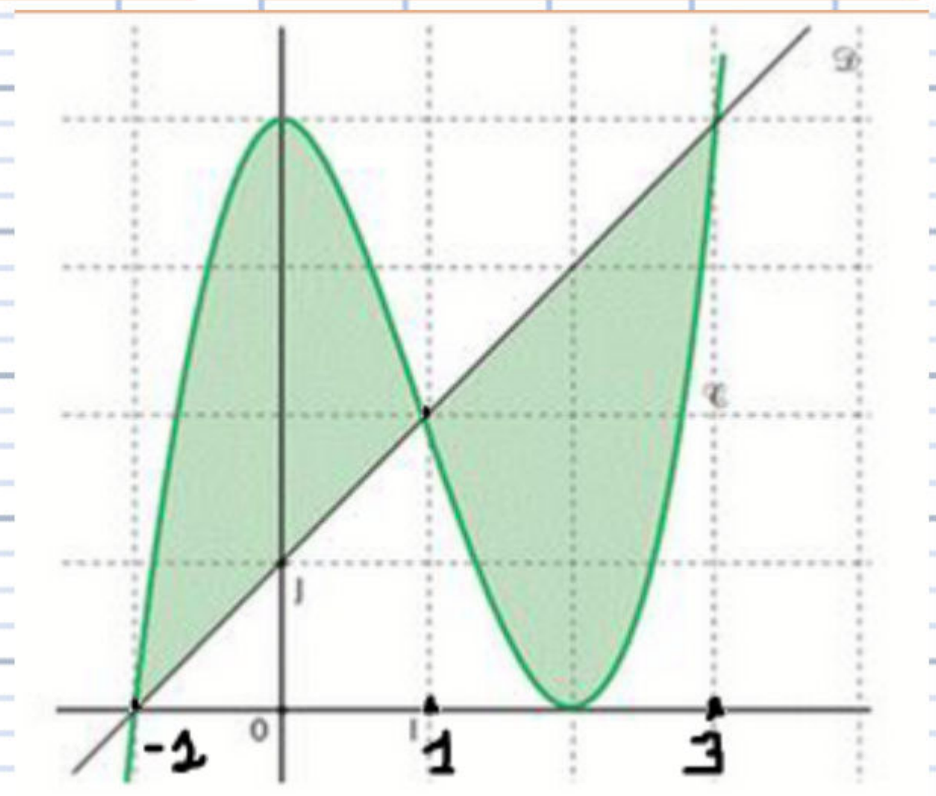
Exercice N°1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
Calculer, en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimite par la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$
par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et la droite $\mathscr{D}$
d'équation $y = x + 1$



On a : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} |f(x) - (x+1)|\,dx$

$= \int_{-1}^{1} |f(x)-(x+1)|\,dx + \int_{1}^{3} |f(x) - (x+1)|\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (f(x)-(x+1))\,dx + \int_{1}^{3} -(f(x) - (x+1))\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 4 - x - 1)\,dx - \int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 + 4 - x - 1)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$

$= [F(x)]_{-1}^{1} - [F(x)]_{1}^{3}$ avec $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

or $\boxed{[F(x)]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)} = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = 4$

et $\boxed{[F(x)]_{1}^{3} = F(3) - F(1)} = \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\mathcal{A} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}\ \text{u.a}}$

Exercice N°2

Cocher la réponse exacte

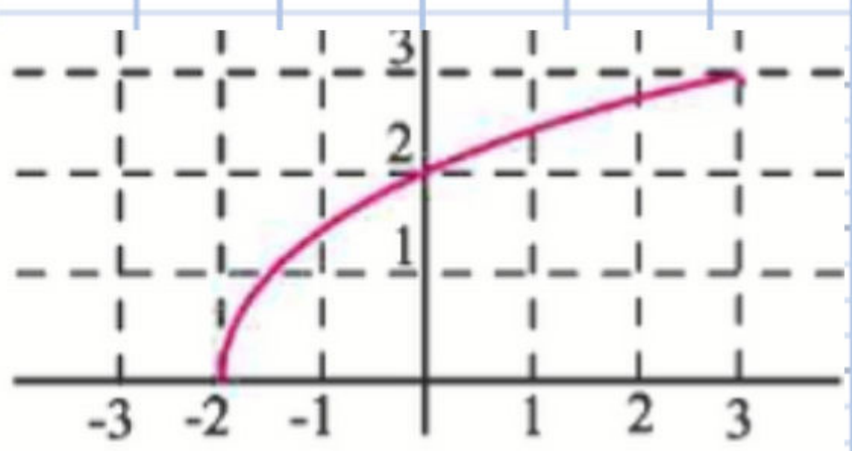
1) On considère les intégrales

$I = \int_0^1 x\cos^2(\pi x)\,dx$ et $J = \int_0^1 x\sin^2(\pi x)\,dx$ alors

a) ☐ $I + J = 1$ b) ☒ $I + J = \frac{1}{2}$ c) ☐ $I + J = 0$

On a : $I + J = \int_0^1 (x\cos^2(x) + x\sin^2(x))\,dx = \int_0^1 x\,dx = [\frac{1}{2}x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$

2) On designer par A l'aire en u.a de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$



a) ☒ $7 \leq A \leq 13$ b) ☐ $15 \leq A \leq 20$ c) ☐ $14 \leq A \leq 21$

3) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

a) ☒ F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ b) ☐ F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c) ☐ F n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

Exercice N°3

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1) Calculer I_1

on a : $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}\,dx$ avec $U(x) = 1+x^2$

$= \left[\sqrt{U(x)}\right]_0^1 = \sqrt{U(1)} - \sqrt{U(0)}$

$= \sqrt{2} - 1.$

donc $\boxed{I_1 = \sqrt{2} - 1}$

2) a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a : $x^n \geq 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$

alors $\boxed{\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \quad \text{donc} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geq 0}$.

d'où $\boxed{I_n \geq 0}$

b) Montre que la suite (I_n) est décroissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$

$= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1)\,dx$

Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $x \leq 1$ alors $x - 1 \leq 0$

or $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$

donc $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$

d'où $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1)\,dx \leq 0$ sig $I_{n+1} - I_n \leq 0$

sig $I_{n+1} \leq I_n$

donc $\boxed{(I_n) \text{ est une suite décroissante}}$

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente

La suite (I_n) est minorée par 0 et décroissante alors (I_n) est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$

Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^2 \leq 1$ alors $1 \leq 1+x^2 \leq 2$

alors $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

alors $1 \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$

alors $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$

alors $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$

b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$ alors $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx$

or $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$

donc $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$